QCM - VRAI - FAUX

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La parabole de foyer $F(1, 0)$ et de directrice $D : x = -1$ a pour équation

☐ $y^2 = 4x$. ☐ $y^2 = 2x$. ☐ $x^2 = 4y$.

2. L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 - 1 = 0$ est une ellipse de centre

☐ $I(-1, 1)$. ☐ $O(0, 0)$. ☐ $I(1, -1)$.

3. Soit m un réel. L'ensemble d'équation $m^2x^2 + |m|y^2 + 1 = 0$ est

☐ une ellipse. ☐ un cercle. ☐ l'ensemble vide.

4. La courbe d'équation $|x^2 - y^2| = 1$ est

☐ une hyperbole. ☐ la réunion de deux hyperboles. ☐ la réunion dune ellipse et dune hyperbole.

5. L'hyperbole d'équation $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ a pour excentricité

☐ $\dfrac{5}{4}$. ☐ $\dfrac{5}{3}$. ☐ $\dfrac{4}{3}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La courbe d'équation $x = \dfrac{1}{2}y^2$ est une parabole de sommet O, de foyer $F\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ et de directrice $D : x = -\dfrac{1}{4}$.

2. La parabole d'équation $x^2 = 4y$ se déduit de la parabole d'équation $y^2 = 4x$ par symétrie par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3. La courbe d'équation $x^2 - y^2 = -5$ est une hyperbole de centre O et de sommets $S\left(0, \sqrt{5}\right)$ et $S'\left(0, -\sqrt{5}\right)$.

4. Les asymptotes de l'hyperbole d'équation $4(x+2)^2 - 9(y-1)^2 - 36 = 0$ sont les droites d'équations respectives $y = \dfrac{2}{3}x$ et $y = -\dfrac{2}{3}x$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5. L'ellipse d'équation $9x^2 + 4y^2 = 36$ a pour excentricité $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de sommet $I(2, 0)$ et de directrice $D : x = 1$.
2. Construire $\mathcal{P}$.

2 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F(2, 2)$ et de directrice $D : x = 3$.
2. Construire $\mathcal{P}$.

3 1. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.
On note F son foyer et D sa directrice.
Déterminer les coordonnées de F et une équation de D.
2. Soit $\mathcal{P}'$ la parabole d'équation $y^2 = -4x + 8$.
a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}'$ a pour foyer F.
b. Déterminer une équation de la directrice D' de $\mathcal{P}'$.
c. Montrer que F est compris entre D et D'.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
4. Soit $\mathcal{P}''$ la parabole d'équation $y^2 = 8x + 8$.
a. Montrer que $\mathcal{P}''$ a pour foyer F.
b. Déterminer une équation de sa directrice D''.
c. Montrer que F n'est pas compris entre D et D''.
d. Existe-t-il des points communs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$.

4 Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice, puis la tracer.
a. $y^2 = 10x$.
b. $x^2 = 12y$.
c. $y^2 = -10x$
d. $x^2 = -12y$.

5 Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice D et de sommet S. Trouver dans chacun des cas suivants l'équation réduite de $\mathcal{P}$.
1. F a pour coordonnées $(-2, 0)$ et S a pour coordonnées $(0, 0)$.
2. S a pour coordonnées $(0, 0)$ et D a pour équation $y + 3 = 0$.

6 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 6x$.
On considère une droite variable D passant par le foyer F de $\mathcal{P}$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un réel non nul.
La droite D coupe la parabole $\mathcal{P}$ en M et M'.
On note K le milieu de $[MM']$.
1. Ecrire, à l'aide de m, les coordonnées de K.
2. Quel est l'ensemble des points K lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$?
3. On désigne par Δ et Δ' les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ issues des points M et M'.
Montrer que Δ et Δ' se coupent sur la directrice de $\mathcal{P}$ et qu'elles sont perpendiculaires.

7 Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.
a. $-9x^2 + 25y^2 = 225$.
b. $9x^2 - 25y^2 = 225$.
c. $x^2 - 4y^2 = 16$.

8 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F et F', de directrice D associée à F, de sommets S et S' et d'excentricité e. Trouver l'équation réduite de $\mathcal{H}$.
1. F a pour coordonnées $(12, 0)$ et S a pour coordonnées $(4, 0)$.
2. F et F' ont pour coordonnées $(0, 5)$ et $(0, -5)$ et $e = \sqrt{3}$.
3. F a pour coordonnées $(0, 2)$, D a pour équation $y + 3 = 0$ et $e = \sqrt{3}$.

9 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$.
Déterminer les asymptotes de $\mathcal{H}$ et construire $\mathcal{H}$.

10 Calculer l'excentricité d'une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.

11 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

On désigne par A, B et C les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives 1, 2 et $-\frac{1}{2}$.

1.Montrer que la tangente en A à $\mathcal{H}$ est perpendiculaire à (BC).

2.On désigne par F le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 3.

a. Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABF.

b. Démontrer que l'orthocentre de ABF est un point de $\mathcal{H}$.

12 Pour chacune des ellipses suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.

a. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

b. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

c. $-25x^2 - 9y^2 = -25$.

13 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 1$.

A tout point M d'affixe $z = Re^{i\theta}$ du cercle $\mathscr{C}$, on associe le point M′ d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du milieu de I de $[MM']$.

2. Montrer que I varie sur une ellipse $\mathcal{E}$ lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

3. Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.

14 1. a. Construire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

b. Déterminer les foyers et les directrices.

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.

a. Exprimer r en fonction de θ.

b. Exprimer à l'aide de θ, la distance MM′ où M′ est le symétrique de M par rapport à O.

c. Déterminer θ pour que la distance MM′ soit maximale.

d. Déterminer θ pour que la distance MM′ soit minimale.

15 Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $25\left(x^2 + y^2\right) = (3x - 16)^2$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et son excentricité.

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$. On pose $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = a\ [2\pi]$.

Exprimer OM à l'aide de a.

3. La droite (OM) coupe la directrice en I et recoupe la conique $\mathcal{C}$ en M′.

a. Montrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante.

b. Montrer que $\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{2}{\overline{OI}}$ pour tout M de $\mathcal{C}$.

16 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{E}$.

On désigne par T la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.

Donner l'équation de la perpendiculaire T′ à T en M_0.

La droite T′ coupe les axes du repère en N et P.

Montrer que le rapport $\frac{M_0N}{M_0P}$ est constant.

17 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ et dont l'un des foyers est noté F. Une droite variable D passant par F coupe l'ellipse en M et N.

Montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ est constant.

18 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point M′ de coordonnées $\begin{cases} X = \sqrt{2}(x + y) \\ Y = \sqrt{2}(x - y) \end{cases}$.

1. Montrer que f est la composée d'une symétrie axiale que l'on précisera et d'une homothétie de centre O et de rapport 2.

2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour image par f la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $5X^2 + 5Y^2 + 6XY - 64 = 0$.

a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$, ses foyers et ses directrices.

b. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique que l'on caractérisera.

c. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercices et problèmes

19 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point M' de coordonnées $\begin{cases} X = \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{3}y\right) \\ Y = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}x+y\right) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une similitude direct de centre O, de rapport 0.5 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0$.

a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f.

b. En déduire que $\mathcal{C}'$ est une ellipse à caractériser.

20 1. Soit $E=\left\{M(x,y)\in P \text{ tel que } x^2+4y^2=1\right\}$.

Donner les éléments caractéristiques de E.

2. Soit D et D′ les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=-1$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Soit $M_0\left(\cos(\theta),\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)$ un point de E avec $\theta\in\Re\backslash\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

a. Vérifier que M_0 appartient à E.

b. Ecrire l'équation de la tangente T à E au point M_0.

c. T coupe D et D′ respectivement en K et K′.

Montrer que KFK′ est un triangle rectangle en F.

21 Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire.

1. $x^2+4y^2+6y=0$.

2. $(3x+5y)^2=(6x-1)(5y+2)$.

3. $x^2-y=3x-1$

22 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\left(4x^2-9y^2+8x+54y-113\right)=0$ ou $\left(16x^2+9y^2+12x-54y-47\right)=0$.

23 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux coniques.

Déterminer les éléments caractéristiques de ces coniques puis les tracer dans un même repère.

24 Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $mx^2+(1+m^2)y^2-2my=0$.

25 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $4x|x|+y^2-16x-20=0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_1$ et d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_2$ que l'on identifiera.

2. Déterminer pour chacune des coniques les éléments caractéristiques.

3. Soit A un point où chacune des coniques coupe la droite $(O,\vec{j})$.

Montrer que les coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont même tangente en A.

Tracer $\mathcal{C}$ en prenant pour unité le centimètre.

26 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y=\sqrt{|x^2-6x+5|}$.

27 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $16x|x|+36y|y|=576$.

28 On considère une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0)$. On note A_1 et A_2 les sommets principaux de $\mathcal{E}$ et T_1 et T_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2. Par un point P de $\mathcal{E}$ distinct de A_1 et A_2, on mène une tangente T à $\mathcal{E}$ qui coupe T_1 en P_1 et T_2 en P_2. Montrer que $\overrightarrow{A_1P_1}.\overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.

29 Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $2x^2+y^2-2x+y-1=0$.

Déterminer les tangentes issues du point $I(2,3)$ à $\mathcal{C}$.

30 Soit a un réel strictement positif.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1$ de sommets principaux A et B.

Soit I un point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AO}$.

On note P et Q les points de contact des tangentes à $\mathcal{E}$ issues de I. Que vaut l'angle $\widehat{PIQ}$?

QCM

1) $y^2 = 4x$

2) $I(1,-1)$

3) $\varnothing$

4) la réunion de deux hyperboles

5) $e = \frac{5}{4}$

Vrai ou faux:

1) faux $\quad P : x = \frac{1}{2} y^2 \Leftrightarrow P : y^2 = 2x$

(P) est une parabole de sommet O, de foyer $F(\frac{1}{2},0)$, de directrice $D: x = -\frac{1}{2}$

2) vrai

$(P) : x^2 = 4y$ et $(P') : y^2 = 4x$

$S_\Delta : M(x,y) \mapsto M'(x',y')$

$tq : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

$M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow M'(y,x) \in (P')$

3) vrai

$$(H) : -\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

H est une hyperbole de centre O, de sommet $S(0,\sqrt{5})$ et $S'(0,-\sqrt{5})$

4) faux $\quad (H) : \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

soit $w(-2,1)$ $\quad dans\ R' = (w,\vec{i},\vec{j})$ $\quad (H) : \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$

$\Delta_1 : Y = \frac{2}{3}X$ $\quad et \quad$ $\Delta_2 : Y = \frac{-2}{X}$ $\quad dans\ R' = (w,\vec{i},\vec{j})$

5) faux

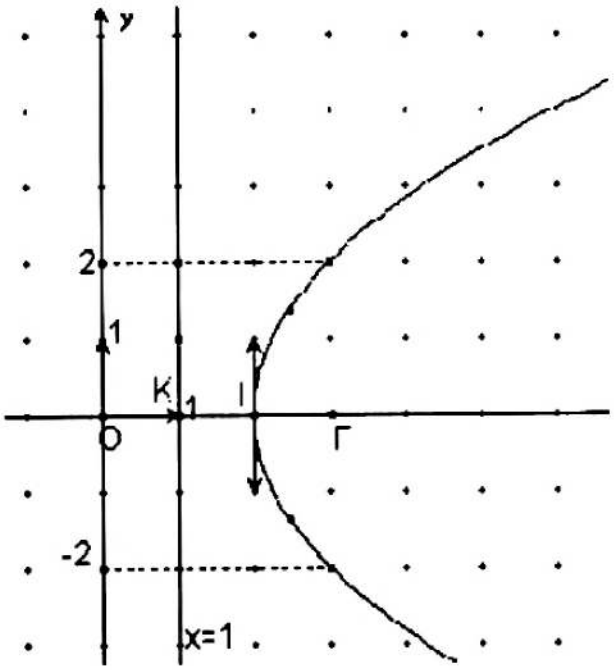
$(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$ car $b = 3 \rangle a = 2 \quad (c = \sqrt{b^2 - a^2})$

Exercice 1

1) Soit K : le projeté orthogonale de I sur D on a K(1,0)
(Π) est de foyer F=S_I(K) I=F*K ⇒F(3,0)
Soit M(x,y) et H son projeté orthogonal sur D ⇒H(1,y)

M∈(Π) ⇔ MF=MH
⇔$(x-3)^2+y^2=(x-1)^2$
⇔ $y^2=4.(x-2)^2$
D'où (Π) a pour équation : $y^2=4.(x-2)$

2)



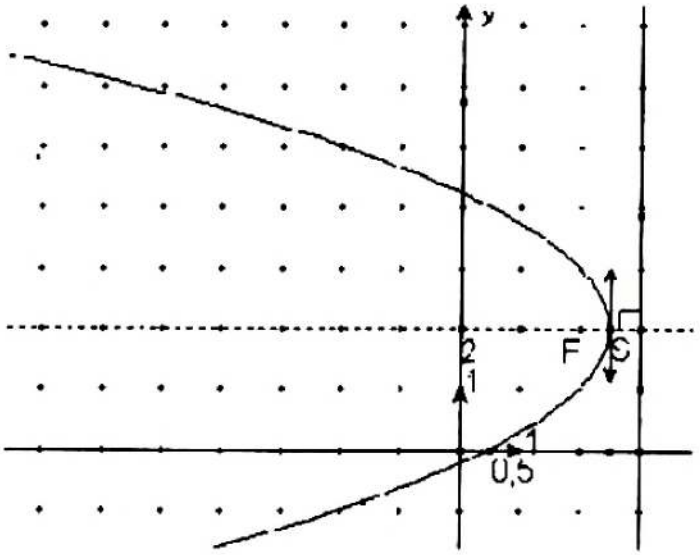
Exercice2

1) Soit M(x,y) et H son projeté orthogonal sur D H(3,y)

M∈(Π) ⇔ MF =MH

⇔ $(x-2)^2+(y-2)^2=(x-3)^2$ ⇔$(y-2)^2=-2(x-5/2)$

2) (Π) est de sommet S(5/2,2)



Exercice 3

1) $(\Pi) : y^2 = 4x$ F(1,0) et D :x= -1

2) $(\Pi') : y^2 = -4(x-2)$

On pose $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y \end{cases}$ $S'(2,0)$

Dans le repère $R'=\left(S';\vec{i};\vec{j}\right)$

$(\Pi') : Y^2 = -4.X$ parabole de foyer $F'(-1,0)_{R'}$ de directrice D' : X=1

a/ Dans le repère $R=\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ F' a pour coordonnées (1,0) d'où F' =F

b/ D': x = 3

c/ Soient K et K' les projetés orthogonaux de F sur D et D' ⇒K(-1,0) et K'(3,0)

$$\Rightarrow \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{FK'}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FK} = -\overrightarrow{FK'}$$

$\overrightarrow{FK}$ *et* $\overrightarrow{FK'}$ sont de sens contraires ⇒ F est compris entre D et D'.

3) M(x,y) ∈ (Π)∩(Π') ⇔

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 = -4x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x = -4x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

(Π)∩(Π')={A(1,2) ; B(1,-2)}

4) $(\Pi'') : y^2 = 8x+8$

$(\Pi'') : y^2 = 8(x+1)$

On pose $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$ S'' (-1,0)

Dans le repère $R''=(S'', \vec{i}, \vec{j})$ $(\Pi'') : Y^2 = 8.X$ donc Π'') est une Parabole de foyer $F''(2,0)_{R''}$ et de directrice D'' : X = -2

a/ dans le repère $R=\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

F'' a pour coordonnées (1,0) D'où F'' = F

b/ D'' : x = -3

c/ Soit K'' :le projeté orthogonale de F sur D''⇒ K''(-3 ,0)

$\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{FK''}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FK''} = 2\overrightarrow{FK}$

$\overrightarrow{FK''}$ *et* $\overrightarrow{FK}$ *sont de meme sens D'où F* n'est pas compris entre D et D"

d/

$$M(x,y)\in(\Pi)\cap(\Pi'')\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4x\\y^2=8x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=4x\\4x=8x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y^2=-8\end{cases}\quad \textit{impossible}$$

D'où $(\Pi)\cap(\Pi'')=\varnothing$

Exercice 4

a) (P_1): $y^2 = 10x$ S = O

$D_1 : x = -\frac{5}{2}$

$F_1(\frac{5}{2},0)$

b) (P_2): $x^2 = 12y$ S = O

$F_2(0,3)$ $D_2 : y = -3$

c) (P_3): $y^2 = -10x$ S = O

$F_3(-\frac{5}{2},0)$ $D_3 : x = \frac{5}{2}$

$(P_3) = S_O(P_1) = S_{O_y}(P_1)$

d) (P_4) : $x^2 = -12y$ S = O

$F_4(0,-3)$ $D_4 : y = 3$

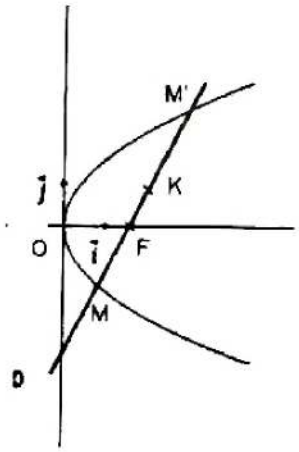
$(P_4) = S_O(P_2) = S_{O_y}(P_2)$

Exercice5

1) F(-2.0) S(0,0) (P): $y^2 = -8x$

2) S(0,0) D: y = -3 (P): $x^2 = 12y$

Exercice 6



(P) : $y^2 = 6x$

D'où $F(\frac{3}{2}, 0)$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$: Vecteur directeur de D

F ∈ D

D'où D a pour équation :

$$y = m\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

M et M' ∈ (P)∩D

Les coordonnées de M et M' sont solution du système :

$$\begin{cases} y = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ y^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m(x - \frac{3}{2}) \\ m^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = m(x - \frac{3}{2} \\ m^2x^2 - 3(m^2+2)x + \frac{9}{4}m^2 = 0 \end{cases}$$

$(E): m^2x^2 - 3(m^2+2)x + \frac{9}{4}m^2 = 0$

$\Delta = 36(m^2 + 1) > 0$

Désignons par x' et x'' les solutions de (E)

x' et x'' sont les abscisses de M et M'

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{3(m^2+2)}{m^2} = 3 + \frac{6}{m^2}$$

$K = M*M' \rightarrow x_K = \frac{x'+x''}{2}$

D'où

$x_K = \frac{3}{2} + \frac{3}{m^2}$

K ∈ D d'où $y_K = m(x_K - \frac{3}{2})$

$y_K = \frac{3}{m}$ d'où $K\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{m^2}, \frac{3}{m}\right)$

2) K(x , y) où $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{m^2} \\ y = \frac{3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} = \frac{1}{m} \\ x - \frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{m^2} \end{cases}$

D'où $x - \frac{3}{2} = 3.\left(\frac{y}{3}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 3.\left(x - \frac{3}{2}\right)$: (r)

F(3/2 ;0) On pose $\begin{cases} X = x - \frac{3}{2} \\ Y = y \end{cases}$

Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$

(r) : $Y^2 = 3X$

Lorsque m varie dans $\mathbb{R}^*$ le point K varie sur une parabole de sommet F, de foyer $F_1\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ de directrice Δ: $X = -\frac{3}{4}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$

3) d'après 1)

$x_M = \frac{3(m^2+2) + 6\sqrt{1+m^2}}{2m^2}$

$x_{M'} = \frac{3(m^2+2) - 6\sqrt{1+m^2}}{2m^2}$

$y_M = \frac{3}{m}\left(1 + \sqrt{1+m^2}\right)$

$y_{M'} = \frac{3}{m}\left(1 - \sqrt{1+m^2}\right)$

Soient (Δ) et (Δ') les tangentes à (P) respectivement en M et M'.

(Δ): $y_M . y = 3(x + x_M)$

(Δ'): $y_{M'} . y = 3(x + x_{M'})$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{y_M} \end{pmatrix}$: vecteur directeur de (Δ)

$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{y_{M'}}\end{pmatrix}$: vecteur directeur de (Δ')

$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 1 + \frac{9}{y_M y_{M'}} = 0$ D'où (Δ)⊥(Δ')

(*) soit (d) : la directrice de (P)

(d) : $x = -\frac{3}{2}$

$(\Delta)\cap(d) = \left\{A\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{m}\right)\right\}$

A ∈ (Δ') d'où (Δ)∩(Δ') = {A} avec A ∈ (d)

Exercice 7

a) $(H): -\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$F(0,\sqrt{34})$; $F'(0,-\sqrt{34})$ $S(0,3)$; $S'(0,-3)$

$D: y = \frac{9}{\sqrt{34}}$; $D': y = \frac{-9}{\sqrt{34}}$ $e = \frac{\sqrt{34}}{3}$

b) $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

$F(\sqrt{34},0)$; $F'(-\sqrt{34},0)$ $S(5,0)$; $S'(-5,0)$

$D: x = \frac{25}{\sqrt{34}}$; $D': x = \frac{-25}{\sqrt{34}}$ $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

c) $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

$F(2\sqrt{5},0)$; $F'(-2\sqrt{5},0)$ $S(4,0)$; $S'(-4,0)$

$D: x = \frac{16}{2\sqrt{5}}$; $D': x = \frac{-8}{\sqrt{5}}$ $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice 8

1) F(12 , 0) ; S(4 , 0) ; a = 4 ; c = 12 ; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 8\sqrt{2}$

D'où $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{128} = 1$

2) F(0 , 5) ; F'(0 , -5) ; $e = \sqrt{3}$

$c = 5\ ;\ e = \frac{c}{b} \qquad \Rightarrow b = \frac{c}{e} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$

D'où $(H): -\frac{x^2}{\frac{50}{3}} + \frac{y^2}{\frac{25}{3}} = 1$

3) F(0 , 2) ; D : y = -3 ; $e = \sqrt{3}$

Soit M(x , y) et H son projeté orthogonal sur D ; H(x , -3)

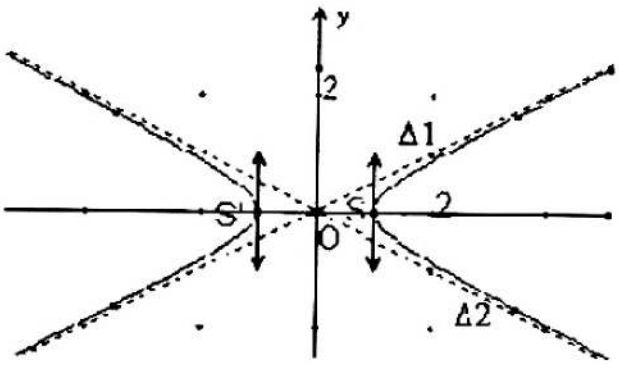
$M(x,y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2.MH^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 3(y+3)^2 \Leftrightarrow (H): -\frac{x^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{\frac{9}{2}} = 1$

Exercice 9

$(\mathcal{H}) : x^2 - \frac{y}{(\frac{1}{2})^2} = 1$ $(\mathcal{H})$ est de centre O , de foyers F($\frac{\sqrt{5}}{2}$,0) et F'(- $\frac{\sqrt{5}}{2}$,0)

De sommets S(1, 0)et S'(-1, 0) et d'asymptotes Δ_1 :y= $\frac{1}{2}$ x et Δ_2 :y=- $\frac{1}{2}$ x



Exercice 10 :

$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Les asymptotes sont $\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ et $\Delta_2 : y = \frac{-b}{a}x$

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{-b}{a}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = b$

D'où $C = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

Exercice 11

$(H): xy = 1$

$(H): y = \frac{1}{x}$

$(H) = (\mathcal{C}_f)$ *avec* $f(x) = \frac{1}{x}$

A(1 ,1) ; $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

1) La tangente (T) à (H) en A a pour coefficient directeur $f'(1)$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -1$

La droite (BC) a pour coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = 1$

$(1) \ .(-1) = -1 \implies (T) \perp (BC)$

2) $F\left(3, \frac{1}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

Δ : la hauteur issue de A au triangle ABF

$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BF}$

$\Leftrightarrow 1(x-1) + \frac{-1}{6}(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} = 0$

D'où $\Delta: y = 6x - 5$

3) Δ' : la hauteur issue de F

$\Delta': y = 2x - \frac{17}{3}$

$\Delta \cap \Delta' = \left\{H\left(-\frac{1}{6}, -6\right)\right\}$

$\frac{-1}{6} \times (-6) = 1 \implies H \in (H)$

Exercice 12

a) $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\left(a = 3 \ ; \ b = 2 \ ; \ c = \sqrt{5} \ ; \ e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

D'où $F(\sqrt{5}, 0)$; $F'(-\sqrt{5}, 0)$

$D: x = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': x = \frac{-9}{\sqrt{5}}$

De sommets A(3 , 0) ; A'(-3 , 0)

B(0 , 2) ; B'(0 , -2)

b) $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$b > a$

$F(0, \sqrt{5})$; $F'(0, -\sqrt{5})$

$D: y = \frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ $, e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

De sommets B(0 , 3) ; B'(0 , -3) ; A(2 , 0) ; A'(-2 , 0)

c) $(E): x^2 + \frac{y^2}{25/9} = 1$

$a = 1$; $b = \frac{5}{3}$; $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{4}{3}$

$e = \frac{4}{5}$

$F\left(0, \frac{4}{3}\right)$; $F'\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$D: y = \frac{25}{12}$; $D': y = -\frac{25}{12}$

De sommets principaux $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$; $B'\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

De sommets secondaires A(1 , 0) ; A'(-1 , 0)

Exercice 13

$M(z) \to M'(z') avec\ z' = \frac{1}{z}$

1) $I = M * M'$

$z_I = \frac{z + z'}{2} = \frac{1}{2}\left[R.e^{i\theta} + \frac{1}{R}.e^{-i\theta}\right]$

$z_I = \frac{1}{2}\left[R(\cos\theta + sin\theta) + \frac{1}{R}(cos\theta - sin\theta)\right]$

$z_I = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right).cos\theta + \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)sin\theta.i$

$$\begin{cases} Re(z_1) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right).cos\theta \\ Im(z_1) = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right).sin\theta \end{cases}$$

2) $I(x,y)tel\ que \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)cos\theta \\ y = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbf{R}$

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)\right]^2} = 1$$

Equation cartésienne d'une ellipse (E)

3) $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) \qquad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$

$a > b \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$

(E) est une ellipse de centre O, de foyer F(1 , 0) et F'(-1 , 0)

De sommets A(a , 0) ; A'(-a , 0)

B(0 , b) ; B'(0 , -b)

Exercice 14

1) $R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$(\mathcal{C}): \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

On pose $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases} \qquad w(-1\,,0)$

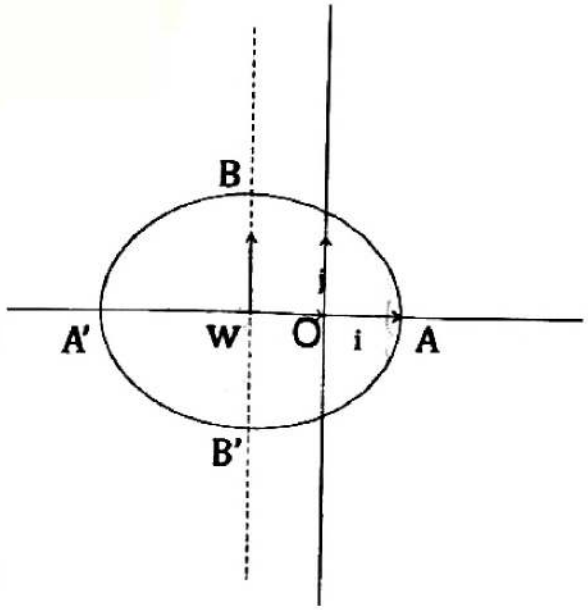
Dans le repère $R' = (w, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$(\mathcal{C}): \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

($\mathcal{C}$) est une ellipse de centre w, de foyers F(-1 , 0)$_{R'}$; F'(-1 , 0)$_{R'}$; de sommets principaux A(2 , 0)$_{R'}$ et A'(-2 , 0)$_{R'}$

de sommets secondaires $B\left(0\,,\sqrt{3}\right)_{R'}$ *et* $B'\left(0\,,-\sqrt{3}\right)_{R'}$

De directrices D : X= 4 et D' : X= -4



2) $z = z_M = re^{i\theta}$; $M \in (\mathcal{C})$

a) $M(r.cos\theta\,, r.sin\theta)$

$(\mathcal{C})$: $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

$(\mathcal{C})$: $4(x^2 + y^2) = x^2 - 6x + 9$

$(\mathcal{C})$: $4(x^2 + y^2) = (x - 3)^2$

$M \in (\mathcal{C}) \implies 4(r^2.cos^2\theta + r^2.sin^2\theta = (r.cos\theta - 3)^2$

$\implies 4r^2 = (3 - r.cos\theta)^2$

$\implies 2r = |3 - r.cos\theta|$ avec $r \leq 3$

D'où $2r = 3 - r.cos\theta \implies r = \frac{3}{2+cos\theta}$

b) $M' = S_O(M)$

$MM' = 2OM = 2r$

$$MM' = \frac{6}{2 + cos\theta}$$

c) $\theta \equiv \pi \quad (2\pi) \rightarrow MM' = 6$

d) $\theta \equiv 0 \quad (2\pi) \rightarrow MM' = 2$

Exercice 15

1) $(\mathcal{C})$: $25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2$

$$(\mathcal{C}): \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(𝒞) est une ellipse $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

2) on pose $r = OM$; $M(r.\cos a\ ,\ r.\sin a)$

$M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow 25(r^2.cos^2a + r^2.sin^2a) = (3r.\cos a - 16)^2$

$\Rightarrow 25\,r^2 = (16 - 3\,r.\cos a)^2$

$$\Rightarrow 5\,r = |16 - 3r.\cos a| \Rightarrow \begin{cases} 5r = 16 - 3r.\cos a \\ ou \\ 5r = -16 + 3r.\cos a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{16}{5+3\cos a} \\ ou \\ r = \frac{-16}{5-3\cos a} \end{cases} < 0$$

D'où

$$\boxed{r = OM = \frac{16}{5 + 3\cos a}}$$

3)a) $(OM) \cap (\mathcal{C}) = \{M', M\}$

Soit $OM' = r'$; $M'(r'\cos(a+\pi)\ ,r'.\sin(a+\pi))$

D'après 2)

$$r' = OM' = \frac{16}{5 + 3\cos(a+\pi)}$$

$$r' = OM' = \frac{16}{5 - 3\cos a}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{5 + 3\cos a}{16} + \frac{5 - 3\cos a}{16}$$

$$\boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}}$$

b) $(\mathcal{C}): \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$w(-3\,,0)$ $\qquad (\mathcal{C}): \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1 \qquad dans\ R' = (w, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$D: X = \frac{25}{3}$ $\quad dans\ R'$ $\qquad\qquad$ $D: x = \frac{16}{3}$ $\quad dans\ R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\cos(a) = \frac{\frac{8}{3}}{\overline{OI}} \Rightarrow \overline{OI} = \frac{8}{3\cos(a)}$$

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{5 + 3\cos a - 5 + 3\cos a}{16} \quad car\ O \in [MM']$$

$$= \frac{3\cos a}{8} = \frac{1}{\overline{OI}}$$

Exercice 16

$a > b \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(T): \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$

$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-y_0}{b^2} \\ \frac{x_0}{a^2} \end{pmatrix}$: *vecteur directeur de* (T)

$\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}$: *vecteur directeur de* (T')

$(T'): \frac{y_0}{b^2}.x - \frac{x_0}{a^2}.y + p = 0$

$M_0 \in (T') \Rightarrow p = \frac{-c^2}{a^2 b^2} x_0\, y_0$

d'où

$(T'): a^2\, y_0\, x - b^2\, x_0\, y - c^2 y_0\, x_0 = 0$

pour $y = 0 \rightarrow x = \frac{c^2\, x_0}{a^2}$ *d'où* $N\left(\frac{c^2 x_0}{a^2}, 0\right)$

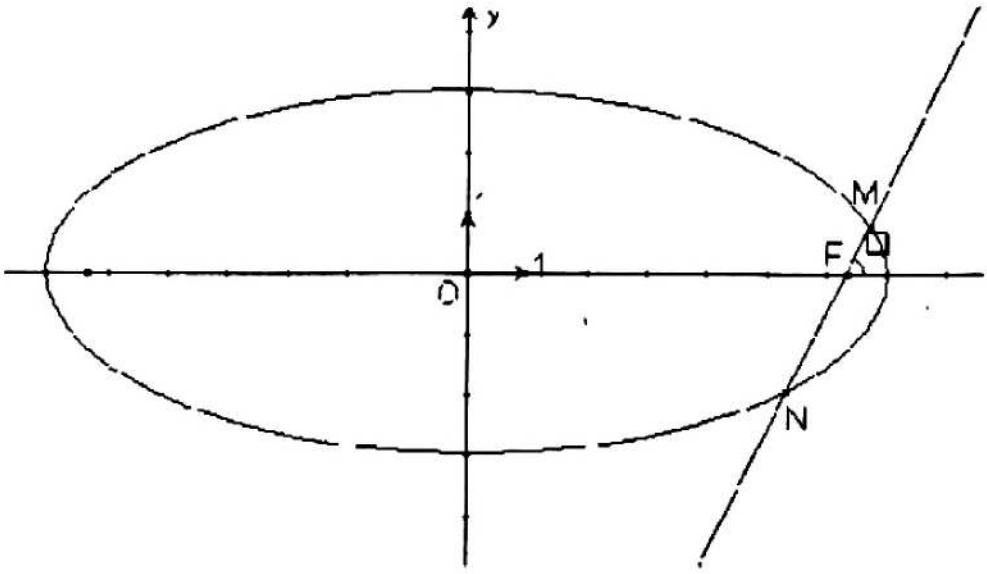
pour $x = 0 \rightarrow y = -\frac{c^2 y_0}{b^2}$ *d'où* $P\left(0, \frac{-c^2 y_0}{b^2}\right)$

$M_0 N = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x_0{}^2 + y_0{}^2}$

$M_0 P = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{a^2}{b^2} y_0{}^2}$

$\frac{M_0 N}{M_0 P} = \frac{b}{a}$

Exercice 17



F(c , 0) $a^2 = b^2 + c^2$

dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$

$$(E): \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(E): b^2(x+c)^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2$$

$$(E): a^2(x^2+y^2) = (b^2 - cx)^2$$

soit $r = FM$; $\theta = \left(\vec{i}; \overrightarrow{FM}\right)[2\pi]$ et $r' = FN$; $\left(\vec{i}; \overrightarrow{FN}\right) \equiv \theta + \pi[2\pi]$

Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$:

$M(r.\cos\theta, r.\sin\theta)$

$N(r'.\cos(\theta+\pi), r'.\sin(\theta+\pi))$

$M \in (E) \Rightarrow a^2(r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta) = (b^2 - cr.\cos\theta)^2$

$\Rightarrow a^2r^2 = (b^2 - cr.\cos\theta)^2$

$\Rightarrow ar = b^2 - cr.\cos\theta$ ou $ar = -b^2 + cr.\cos\theta$

$\Rightarrow r = \frac{b^2}{a + c.\cos\theta}$ ou $r = \frac{-b^2}{a - c.\cos\theta} < 0$

d'où

$$\boxed{r = FM = \frac{b^2}{a + c.\cos\theta}}$$

$$r' = FN = \frac{b^2}{a + c.\cos(\theta+\pi)} = \frac{b^2}{a - c.\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2a}{b^2}$$

Exercice 18

1) $f: M(x,y) \mapsto M'(X,Y)$

$tq \begin{cases} X = \sqrt{2}(x+y) \\ Y = \sqrt{2}(x-y) \end{cases}$ (*)

$M(z) \mapsto M'(Z)$

$z = x + iy \quad ; \quad Z = X + iY$

avec $Z = \sqrt{2}(x+y) + i\sqrt{2}(x-y) = \sqrt{2}(1+i).\bar{z}$

d'où f est une similitude indirecte de centre O, de rapport $|\sqrt{2}(1+i)| = 2$

soit Δ son axe. $\Delta = \{M \in P / \ \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}\}$

$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow Z = 2z \Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i).\bar{z} = 2z$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1+i)(x-iy) = 2(x+iy)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{2}x \\ x-y = \sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow y = (\sqrt{2}-1)x$

d'où

$$\boxed{\Delta: y = (\sqrt{2}-1)x}$$
$$f = h_{(0,2)} o S_\Delta = S_\Delta o h_{(0,2)}$$

2) a) $(C'): 5X^2 + 5Y^2 + 5XY - 64 = 0$

D'après (*), $(C): 5\left(\sqrt{2}(x+y)\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}(x-y)\right)^2 + 12(x^2-y^2) - 64 = 0$

.....

.....

$(C): \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

(C) est une ellipse de centre O, de foyers $F(0, \sqrt{6})$; $F'(0, -\sqrt{6})$

$D: y = \dfrac{8}{\sqrt{6}}$; $D': y = \dfrac{-8}{\sqrt{6}}$

b) $(C') = f(C)$

(C ') est une ellipse de centre $f(0) = 0$; de foyers $K(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = f(F)$

$K'(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = f(F')$

De directrices $\Delta = f(D)$ et $\Delta' = f(D')$

Exercice 19

1) $f: M(x,y) \longmapsto M'(X,Y)$

$$tq \begin{cases} X = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

$f: M(z) \longmapsto M'(Z)$; $z = x + iy$; $Z = X + iY$

tq: $Z = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) + \frac{1}{4}i(-\sqrt{3}x + y)$

$$Z = \frac{1}{4}\left[(x + iy) - i\sqrt{3}(x + iy)\right]$$

$$Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}.z$$

D'où f est une similitude directe de centre O ; de rapport $\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$ d'angle $Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}$

2) a) $\begin{cases} X = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - \sqrt{3}.Y \\ y = \sqrt{3}X + Y \end{cases}$

D'où $(\mathcal{C}'): 15(X - \sqrt{3}Y)^2 + 13(\sqrt{3}X + Y)^2 - 2\sqrt{3}(X - \sqrt{3}Y).(\sqrt{3}X + Y) - 768 = 0$

$(\mathcal{C}'): 48\,X^2 + 64\,Y^2 - 768 = 0$

$(\mathcal{C}'): \frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{12} = 1$

b) $(\mathcal{C}')$ est une ellipse de centre O, de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$

de sommets $A(4,0)$; $A'(-4,0)$; $B(0,2\sqrt{3})$; $B'(0,-2\sqrt{3})$

De directrices $D: X = 8$; $D': X = -8$ $\quad d'excentricité \quad e = \frac{1}{2}$

(*) $(\mathcal{C})$est une ellipse image de $(\mathcal{C}')$ par f^{-1}

$(\mathcal{C})$: ellipse de centre O, de foyers $K(2,2\sqrt{3})$; $K'(-2,-2\sqrt{3})$

De sommets $S(4,4\sqrt{3})$; $S'(-4,-4\sqrt{3})$

$L(-6,2\sqrt{3})$; $L'(6,-2\sqrt{3})$

$$e = \frac{1}{2}$$

Exercice 20

1) (E) : $x^2+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$ (E) est une ellipse de centre O

de foyers $F(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ et $F'(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

de directrices $\Delta : x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\Delta' : x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ d'excentricité $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

de sommets A(1,0) ;A'(-1,0) ; $B(0,\frac{1}{2})$ et $B'(0,-\frac{1}{2})$

2) D : x=1 ; D' : x=-1 ; $F(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ $M_0(\cos(\theta),\frac{1}{2}.\sin(\theta))$ $\theta\neq k.\pi$ $k\in$

a/ $x_{M_0}^2+4.y_{M_0}^2=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \Rightarrow M_0\in (E)$.

b/ **T:** $x.\cos(\theta)+2y.\sin(\theta)=1$

c/ $K(x,y)\in T\cap D\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=1 \\ x.\cos(\theta)+2y.\sin(\theta)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{cases} \Rightarrow K\left(1,\frac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right) \text{ de meme } K'\left(-1,\frac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{FK'}\begin{pmatrix} -1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{FK'}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1-\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right).\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2.\sin(\theta)}\right)=-1+\frac{3}{4}+\frac{\sin^2(\theta)}{4.\sin^2(\theta)}=0$$

d'où Le triangle KFK' est rectangle en F

Exercice 21

1) $(E): x^2+4y^2+6y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{9}{16}}=1$

On pose $\begin{cases} X=x \\ Y=y+\frac{3}{4} \end{cases}$ $w\left(0,\frac{-3}{4}\right)$

Dans le repère $R'=(w,\vec{i},\vec{j})$ $(E): \dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{16}}=1$

(E) est une ellipse de centre w, de foyers $F\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$ $F'\left(\frac{-3\sqrt{3}}{4},0\right)$

De sommets $A\left(\frac{3}{2},0\right)$; $A'\left(-\frac{3}{2},0\right)$; $B\left(0,\frac{3}{4}\right)$ et $B'\left(0,\frac{-3}{4}\right)$ Dans le repère R'

2) $(E): (3x+5y)^2=(16x-1)(5y+2)$

$$(E): \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y+\frac{1}{10}\right)^2}{\frac{9}{100}} = 1$$

Dans $R' = (w, \vec{i}, \vec{j})$ avec $w\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{10}\right)$

$$(E): \frac{X^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{100}} = 1$$

ellipse…

3) $(P): x^2 - y = 3x - 1$

$$(P): \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} X = x - \frac{3}{2} \\ Y = y + \frac{5}{4} \end{cases} \qquad S\left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{4}\right)$$

dans le repère $R' = (S, \vec{i}, \vec{j})$

$(P): X^2 = Y$

(P) est une parabole de sommet S de foyer $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$; de directrice $Y = -\frac{1}{4}$ dans le repère R'

Exercice 22

soit $(\mathcal{C})$ cet ensemble

$(H): 4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$

$$(H): \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$R_1 = (w, \vec{i}, \vec{j})$ avec $w(-1, 3)$

Dans R_1 :

$$(H): \frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

(H) est une hyperbole de foyers $F(\sqrt{13}, 0)_{R_1}$; $F'(-\sqrt{13}, 0)_{R_1}$

de sommets $S(3, 0)_{R_1}$; $S'(-3, 0)_{R_1}$

d'asymptotes $\Delta_1: Y = \frac{2}{3}X$ $\Delta_2: Y = \frac{-2}{3}X$

soit

$$(E): 16x^2 + 9y^2 + 12y^2 + 12x - 54y - 47 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{621}{64}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{621}{36}} = 1$$

dans $R_2 = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *avec* $\Omega\left(\frac{-3}{8}, 3\right)$ $(E): \frac{X^2}{\frac{521}{64}} + \frac{Y^2}{\frac{521}{36}} = 1$ $b > a$

(E)est une ellipse de centre Ω de foyers $F\left(0, \frac{\sqrt{57}}{3}\right)$; $F'\left(0, -\frac{\sqrt{57}}{3}\right)$

de sommets $A\left(\frac{\sqrt{521}}{8}, 0\right)$; $A'\left(-\frac{\sqrt{521}}{8}, 0\right)$. $B\left(0, \frac{\sqrt{521}}{6}\right)$ *et* $B'\left(0, \frac{-\sqrt{521}}{6}\right)$

D'où $(\mathcal{C}) = (E) \cup (H)$

Exercice 23

$(\mathcal{C}): \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = (x^2-1)^2$

$(\mathcal{C}): \frac{y^2}{4} = x^2 - 1$ *ou* $\frac{y^2}{4} = -x^2 + 1$

(*) $(E): \frac{y^2}{4} = -x^2 + 1$

$(E): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

ellipse de centre O, de foyers $F(0, \sqrt{3})$ $F'(0, -\sqrt{3})$

de sommets $B(0,2)$ $B'(0,-2)$ $A(1,0)$ $A'(-1,0)$

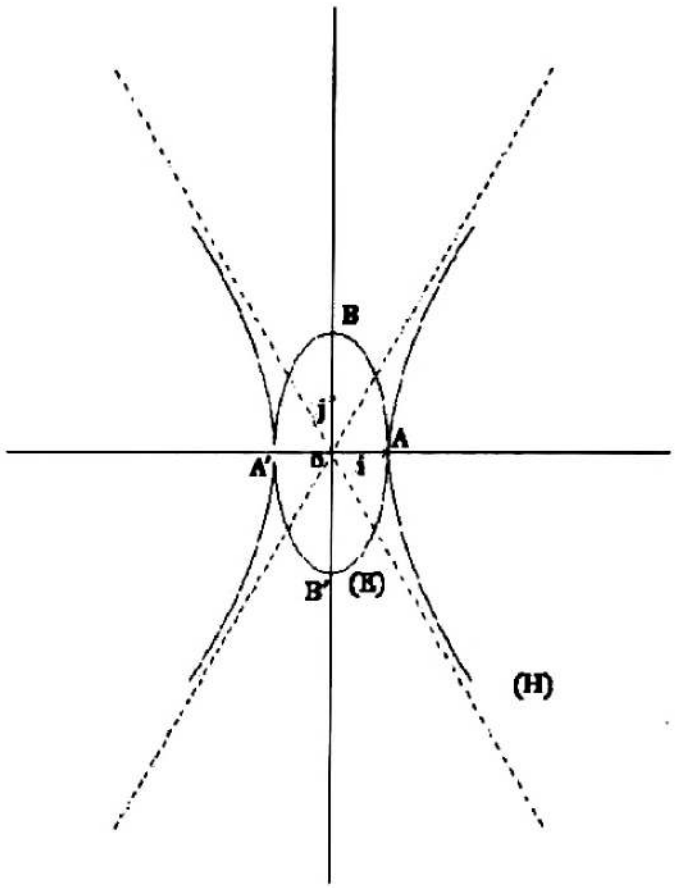
(*) $(H): \frac{y^2}{4} = x^2 - 1$

$(H): x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(H) est une hyperbole de centre O, de foyers $F(\sqrt{5}, 0)$ $F'(-\sqrt{5}, 0)$

de sommets $A(1,0)$ $A'(-1,0)$ et d'asymptotes $\Delta_1: y = 2x$ $\Delta_2: y = -2x$

$(\mathcal{C}) = (E) \cup (\mathcal{H})$



Exercice 24

$(\mathcal{C}_m): mx^2 + (1+m^2)y^2 - 2my = 0$

$(\mathcal{C}_m): mx^2 + (1+m^2)\left(y - \frac{m}{1+m^2}\right)^2 = \frac{m^2}{1+m^2}$

1^er cas : $m = 0$ $\quad (\mathcal{C}_0): y = 0$ droite

2ème cas : $m \neq 0$ $\quad (\mathcal{C}_m): \frac{x^2}{\left(\frac{m}{1+m^2}\right)} + \frac{\left(y-\frac{m}{1+m^2}\right)^2}{\frac{m^2}{1+m^2}} = 1$

$$\frac{m}{1+m^2} = \frac{m^2}{1+m^2} \Leftrightarrow m = 1$$

1. pour m=1 ➔ $(\mathcal{C}_1)$ est un cercle
2. m<0 ➔ $(\mathcal{C}_m)$: hyperbole
3. m>0 et m≠1 ➔ $(\mathcal{C}_m)$ est une ellipse

Exercice 25

1)et 2)

1. pour $x \geq 0$

$(\mathcal{C}): 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

w(2 , 0) dans le repère $R_1 = (w, \vec{i}, \vec{j})$ $(\mathcal{C}): \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{36} = 1$

ellipse de centre w, de foyer $F(0, 3\sqrt{3})$ $F'(0, 3\sqrt{3})$

de sommets $A(3, 0)$ $A'(-3, 0)$ $B(0, 6)$ $B'(0, -6)$

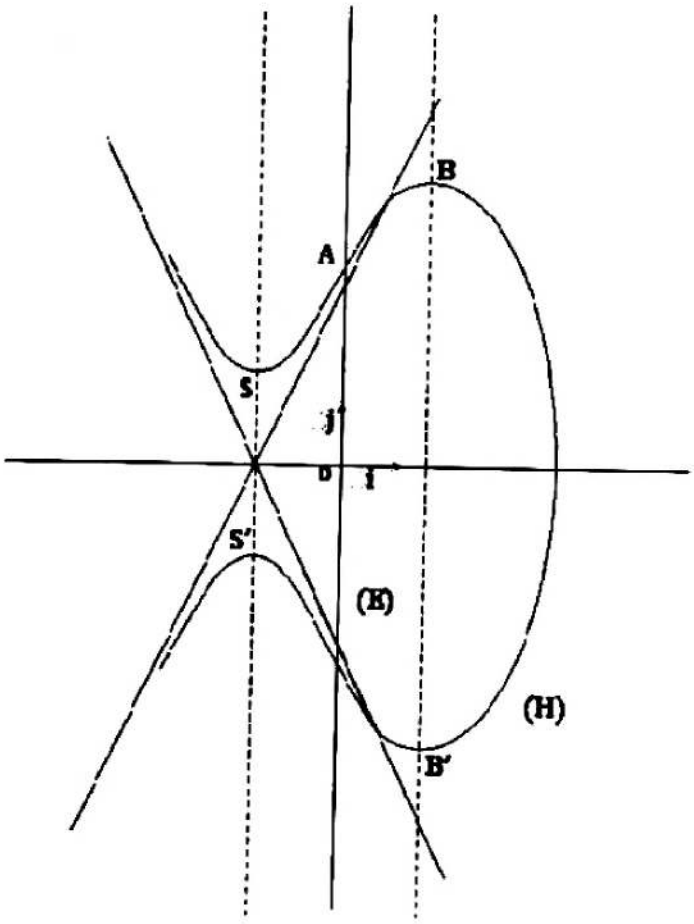
2. pour $x \leq 0$

$(\mathcal{C}): -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow -(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

dans le repère $R_1 = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$; $\Omega(-2, 0)$ $(\mathcal{C}): -X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$

hyperbole de centre Ω ; de foyers $F_1(0, \sqrt{5})$ $F_2(0, -\sqrt{5})$

de sommets $S(0, 2)$; $S'(0, -2)$ d'asymptotes $\Delta_1: Y = 2X$; $\Delta_2 = -2X$



3) $x = 0 \rightarrow y = 2\sqrt{5}$ *ou* $y = -2\sqrt{5}$

$(\mathcal{C}) \cap (Oy) = \{A(0,2\sqrt{5}); A'(0,-2\sqrt{5})\}$

(*) (T_1) : la tangente à (E) en A

$A(0,2\sqrt{5})_R \longrightarrow A(-2,2\sqrt{5})_{R_1}$

$(T_1): \frac{-2X}{9} + \frac{2\sqrt{5}.Y}{36} = 1$

$(T_1): 4X - \sqrt{5}Y + 18 = 0$

dans le repère $R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\quad (T_1): 4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$

(*) (T_2) : la tangente a (H) a A

$A(0,2\sqrt{5})_R \longrightarrow A(2,2\sqrt{5})_{R_2}$

$(T_2): -2X + \frac{2\sqrt{5}Y}{4} = 1$

$(T_2): -4X - \sqrt{5}Y + 2 = 0$

dans le repère $R = (o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\quad (T_2): 4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$

$(T_1) = (T_2)$

Exercice 26

$(\mathcal{C}): y^2 = |x^2 - 6x + 5|$ avec $y > 0$

x		1		5	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

*pour $x \in [1,5]$ $\quad (\mathcal{C}): y^2 = -x^2 + 6x - 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$

cercle de centre $I(3,0)$ de rayon 2

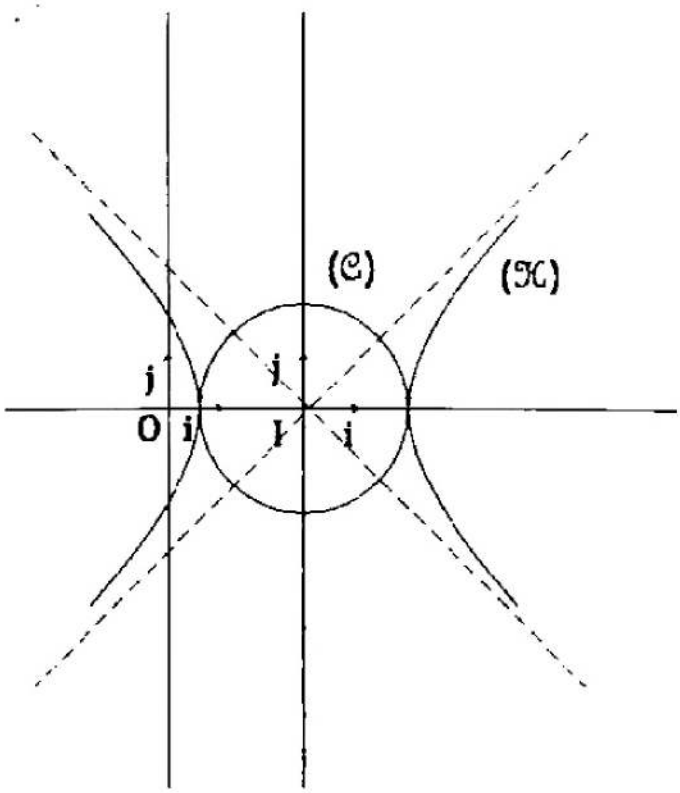
*pour $x \in]-\infty,1] \cup [5,+\infty[$ $\quad (\mathcal{C}): y^2 = x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

$I(3,0)$ $\quad R' = (I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ hyperbole équilatère de sommets $S(2,0)_{R'}$ et $S'(-2,0)_{R'}$ d'asymptotes $Y = X$ *et* $Y = -X$

Soit $\quad (\mathcal{C}_1')$: Le demi-cercle de $(\mathcal{C}_1)$ situé dans le demi plan $y \geq 0$

$(\mathcal{H}')$: La partie de $(\mathcal{H})$ situé dans le demi plan $y \geq 0$

$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}'_1) \cup (\mathcal{H}')$



Exercice 27

1. $x \geq 0$ *et* $y \geq 0 (\mathcal{C})$: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipse

2. $x \geq 0$ *et* $y \leq 0$

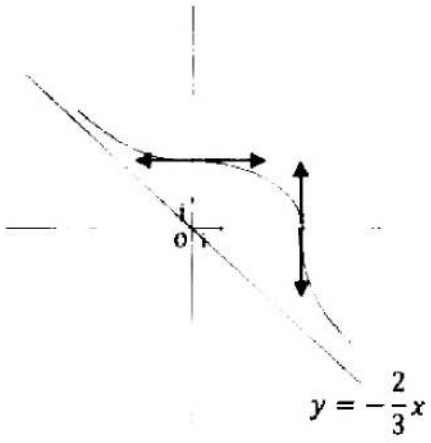
$(\mathcal{C})$: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ hyperbole

3. $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$

$(\mathcal{C})$: $-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ hyperbole

4. $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$

$(\mathcal{C})$: $-(16x^2 + 36y^2) = 576$ ensemble vide



Exercice 28

$A_1(a, 0)$ $A_2(-a, 0)$ $T_1: x = a$ $T_2: x = -a$

$P(x_0, y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

T: $\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$

$T_1 \cap T = \left\{P_1(a\,,\frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\right\}$ $\qquad$ $T_2 \cap T = \left\{P_2(-a\,,\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\right\}$

$\overrightarrow{A_1P_1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{A_2P_2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{A_1P_1}\,.\,\overrightarrow{A_2P_2} = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}\right) = b^2$$

Exercice 29

$$(\mathcal{C}): \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{8}} + \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{4}} = 1$$

on pose $\begin{cases} X = x-\frac{1}{2} \\ Y = y+\frac{1}{2} \end{cases}$

$w\left(\frac{1}{2}\,,\frac{-1}{2}\right)$ $\qquad$ $dans\ R' = (w,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$(\mathcal{C}): \frac{X^2}{\frac{7}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{4}} = 1$$

$I(2\,,3)_R \longrightarrow I\left(\frac{3}{2}\,,\frac{7}{2}\right)_{R'}$

T: une tangente à (C) en $M_0(X_0\,,Y_0)_{R'}$

$$T: \frac{X\,X_0}{\frac{7}{8}} + \frac{Y\,Y_0}{\frac{7}{4}} = 1$$

$$T: 2\,X\,X_0 + Y\,Y_0 = \frac{7}{4}$$

$$I\left(\frac{3}{2}\,,\frac{7}{2}\right) \in T \implies \boxed{3X_0 + \frac{7}{2}Y_0 = \frac{7}{4}}$$

$$\frac{X_0^2}{\frac{7}{8}} + \frac{Y_0^2}{\frac{7}{4}} = 1 \quad \boxed{\implies 2\,X_0^2 + Y_0^2 = \frac{7}{4}}$$

déterminons les coordonnées de M_0

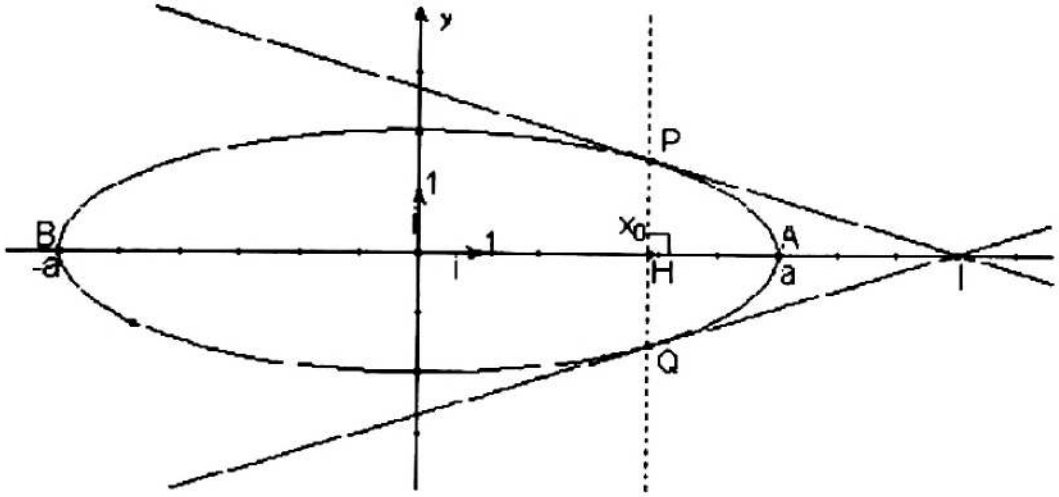
$$\begin{cases} 3\,X_0 + \frac{7}{2}Y_0 = \frac{7}{4} \\ 2\,X_0^2 + Y_0^2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$ .....compléter les calculs...

Exercice 30

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$

d'où A(a , 0) ; B(-a , 0)

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow A = O * I \Rightarrow I(2a, 0)$



$P(x_0 , y_0) \qquad Q(x_0 , -y_0)$

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1$

(T): la tangente à (E) en P

$(T): \frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{4\,y\,y_0}{a^2} = 1$

$$I(2a , 0) \in (T) \Rightarrow \frac{2a\,x_0}{a^2} + 0 = 1 \qquad \boxed{\Rightarrow x_0 = \frac{a}{2}}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a}$$

$H = P * Q \Rightarrow H\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

$$tg\left(\frac{1}{2}P\hat{I}Q\right) = tg(P\hat{I}H) = \frac{PH}{IH} = \frac{|y_0|}{|x_0 - 2a|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{3\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow P\hat{I}H = 16{,}1 \quad P\hat{I}Q = 32{,}2$